<u>Lineare Algebra Zusammenfassung</u>

Gliederung:

Kapitel 1: Matrizen

Definintion 1.1: (Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Es seien m, n positive natürliche Zahlen.
- Eine m x n Matrix ist eine rechteckige Anordnung.
- Formaler: m x n Matrix ist eine Abbildung auf K des kartesischen Produkts zweier Mengen
- Ihre Einträge sind Elemente des Körpers K.
- Zwei Matrizen sind gleich wenn alle Einträge an allen Stellen übereinstimmen.
- Eine 1 x n Matrix wird als Zeilenvektor, eine m x 1 Matrix als Spaltenvektor bezeichnet.
- m-dimensionaler Standardraum: $K^m := K^{m \times 1}$
- Eine Matrix heißt quadratisch, falls m=n.
- Transponierte Matrix: $K^{m \times n}$ ist $A^T := (a_{j,i}) \in K^{n \times m}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$
- Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, falls A^T = A.

Definition 1.2: (Summe und Produkt von Matrizen):

Summe:

- Man kann Matrizen nur dann addieren, wenn m und n übereinstimmen.
- komponentenweise Addition.

Produkt:

- Matrix * Matrix: “Zeile mal Spalte”, nicht komponentenweise $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Skalar * Matrix: komponentenweise.

Satz 1.3: (Regeln für Matrizen):

1. (K^ m x n, +) ist eine abelsche Gruppe.
2. Regeln mit Skalaren:
   1. s * (A + B) = s * A + s * B,
   2. (s + z) * A = s * A + z * A,
   3. s * (z * A) = (s * z) * A,
   4. 1 * A = A.
3. Regeln mit Matrizen:
   1. (A * B) * C = A * (B * C),
   2. A * (B + C) = A * B + A * C,
   3. (A + B) * C = A * C + B * C.
   4. Einheitsmatrix * A = A und B * Einheitsmatrix = B.

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme

Defintion 2.1: (Lineare Gleichungssysteme)

- Eine Gleichung der Form A(Koeffizentenatrix) * x = b heißt ein Lineares Gleichungssystem.
- Das LGS heißt homogen falls alle Einträge von b(Spaltenvektor) = 0, ansonsten inhomogen.
- Elementare Zeilenoperationen:
    - Typ I: Vertauschen zweier Zeilen;
    - Typ II: Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar, element des Körpers ungleich 0;
    - Typ III: Addieren des s-fachen einer Zeile zu einer anderen, s element K.

Definition 2.2: (Zeilenstufenform)

Eine Matrix ist in Zeilenstufenform, falls:

- Beginnt eine Zeile mit k Nullen, so stehen unter diesen Nullen lauter weitere Nullen.
- Unter dem ersten Eintrag nicht 0 einer jeden Zeile, stehen lauter Nullen.

Eine Matrix ist in strenger Zeilenstufenform, falls außerdem gilt:

- Über dem ersten Eintrag nicht 0 einer jeden Zeile stehen lauter Nullen.

Algorithmus 2.2: (Gauss)

1. Setze B = A.clone()
2. B sei bis zur r-ten Zeile in Zeilenstufenform
3. Falls A schon in Zeilenstufenform, und streng gewünscht gehe zu 8.
4. Suche dem am weitesten links stehenden Eintrag ungleich 0 von B unterhalb der r-ten Zeile.
5. Bringe diesen Eintrag in die Zeile darunter (Typ I)
6. Erzeuge unterhalb dieses Eintrags lauter Nullen (Typ III, Typ II)
7. Gehe zu 2.
8. Bringe B auf strenge Zeilenstufenform (Typ III)

Algortithmus 2.3: (LGS)

1. Bringe die erweiterte Koeffizentenmatrix auf strenge Zeilenstufenform.
2. Lösungsmenge ist die rechte Spalte nach strenger Zeilenstufenform

Ergebnisse:

- Unlösbarkeit: $j = n + 1$
- Eindeutige Lösbarkeit
- Uneindeutige Lösbarkeit

Definition 2.8: (Rang)

- Es sei A! eine Matrix die durch elementare Zeilenoperationen aus der A hervorgegangen ist. Dann ist der Rang von A die Anzahl r der Zeilen A! Die mindestens einen Eintrag nicht 0 haben.
- → Ein LGS ist genau dann lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix A denselben Rang hat wie die erweiterte Koeffizentenmatrix

Kapitel 3: Vektorräume

Definition 3.1: (Vektorraum)

- Eine Menge V zusammen mit 2 Abbildungen +: V x V → V und *: K x V → V, sodass folgende Axiome gelten:
  1. V ist mit + als Verknüpfung eine abelsche (= kommutative) Gruppe.
  2. $$a \boxdot (v \boxplus w) = a \boxdot v \boxplus a \boxdot w$$
  3. $$(a + b) \boxdot v = a \boxdot v \boxplus b \boxdot v.$$
  4. $$(a \cdot b) \boxdot v = a \boxdot (b \boxdot v).$$
  5. $$1 \boxdot v = v.$$
- Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren .
- Der n-dimensionale Standardraum K^n ist ein K-Vektorraum.

Proposition 3.2:

Wenn V ein K-Vektorraum, dann gilt:

1. a * 0 = 0 und 0 * v = 0
2. (-a) * v = a * (-v) = - (a * v);
3. aus a * v = 0 folgt: a = 0 oder v = 0

Definition 3.3: (Unterraum)

Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt Unterraum, falls:

1. U keine leere Menge ist;
2. Wenn man zwei Elemente des Unterraums addiert liegt das Ergebnis noch in U
3. Wenn man ein Element des Körpers mit U multipliziert so liegt das Ergebnis noch in U

→ Jeder Unterraum enthält den Nullvektor

→ Mit den Operationen + und * von V wird ein Unterraum selbst ein K-Vektorraum.

Proposition 3.4:

1. Die Schnittmenge aus 2 Unterräumen ist ein Unterraum.
2. Das Ergebnis der Addition zweier Unterräume ist ein Unterraum.
3. Die Schnittmenge aus einem Unterraum und einer leeren Menge ist ein Unterraum.

Definition 3.5: (Erzeugter Unterraum)

- Ist S eine Teilmenge von V
- Bildet man den Schnitt aller Unterräume einer Menge M so heißt <S> der von S erzeugte Unterraum von V.

Satz 3.6:

Sind U1 und U2 Unterräume vom K-Vektorraum V und S :=U1 ∪ U dann ist <S> = U1 + U2.

Kapitel 4: Linearkombinationen

Definition 4.1: (Linearkombinationen)

- Es seien v1,..,vn Elemente des Vektorraums V. Ein Vektor v heißt Linearkombination von v1,…,vn, falls es Skalare a1,…,an aus K gibt, mit denen v = a1v1,…,anvn.

Satz 4.2:

Für eine Teilmenge S von V ist der erzeugte Unterraum <S> die Menge aller Linearkombinationen von S.

Proposition 4.3:

Es sei A! Ein durch elementare Zeilenoperationen aus der Matrix A hervorgegangen.
Dann erzeugen die Zeilen von A denselben Unterraum von K^-1 x n wie die Zeilen von A!.

Definition 4.4: (Lineare Unabhängigkeit)

Vektoren v1,…,vn element des Vektorraums V heißen linear unabhängig, falls für alle a1,..,an folgendes gilt: $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0,\ a_2 = 0, \ldots, a_n = 0.$